ホワイトノイズと量子確率解析の非線形拡張(第6回『非平衡系の統計物理』シンポジウム,研究会報告)

ホワイトノイズと量子確率解析の非線形拡張

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科
尾 畑 伸 明
obata@math.nagoya-u.ac.jp

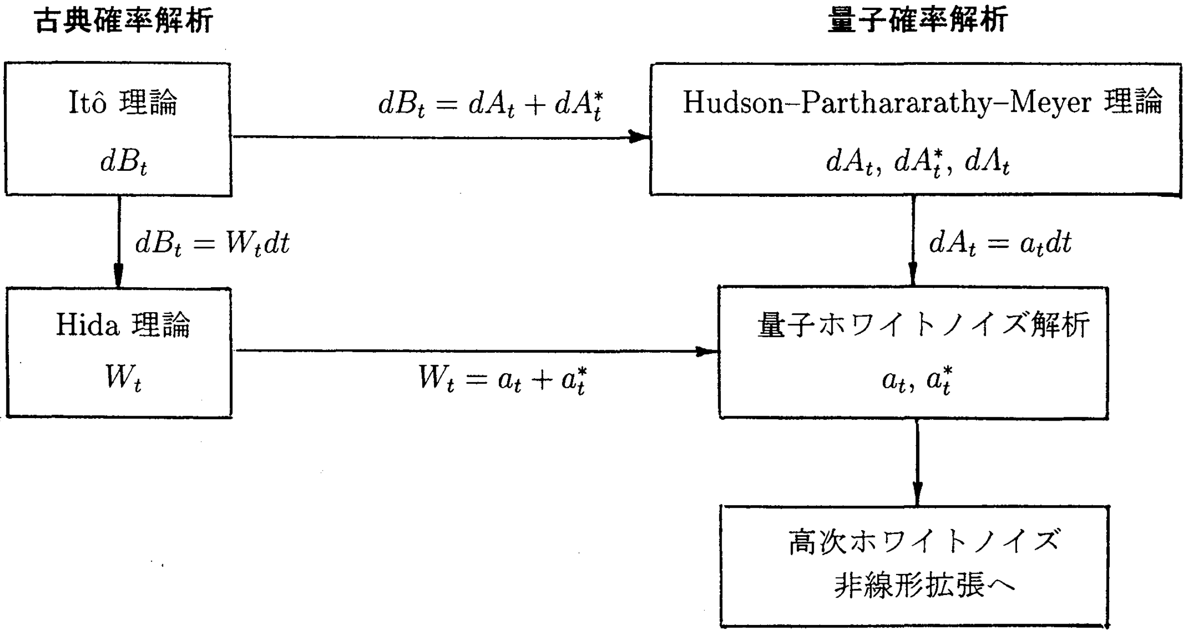
1 はじめに

揺らぎを含む物理現象の時間発展は確率微分方程式で記述される. 確率積分が厳密に定式化され, 確率微分方程式の基礎付けがなされたのは1940年代のことであり, 伊藤理論として広く知られているが, 半世紀を経た今日では, より無限次元解析としての色彩が強まりながら様々に発展している. それらは, 包括的に「確率解析」と呼ばれているが, そこでは, ランダム性を無限自由度に言い換え, 確率的な対象を無限次元的な対象に変換して議論がなされる. この観点に立つことで, 超関数論などの関数解析的手法が導入され易くなり, 理論が大きく発展するのである. 無限次元解析は, 理論構成上の自由度も大きく, 何を礎とするかによって様々な流儀がある. なかでも Malliavin 解析 [32] やホワイトノイズ (飛田) 解析 [16], [27], [33] は, 特色ある理論体系として著名である.

ホワイトノイズ解析は, ホワイトノイズを独立な確率変数の時系列として取り出し, それを「素過程」と位置づける理論である点が極めて特徴的である. Schwartz の超関数論によって, それまでは意味が曖昧であった Dirac のデルタ関数が正当化され, 計算ルールが厳密に与えられたように, ホワイトノイズに厳密な定式化が与えられ, 文献に散見される「形式的」計算 (通常の微積分と同様な計算) が, ホワイトノイズ解析の枠組みで理解されるようになる. 多くの場合, 形式的計算を結果的に正しいと認めることになっても, ホワイトノイズ解析が理論として意味を失うものではない. Schwartz 超関数論が, 結局は, デルタ関数などの形式的計算を追認することになっても, Schwartz 超関数論が不要にはならないのと同じである.

ホワイトノイズ解析は, 当初, 伊藤解析の拡張としてスタートした [15] ため, 対象は「古典」確率論の範疇を出るものではなかった. 一方, 量子確率解析は, その創始 [21] の頃から, 量子物理の問題意識からであろうが, ヒルベルト空間論から離れずに発展してきたという経緯がある. その両者のアイデアを融合して, さらなる展開を目指す試みは, ホワイトノイズ作用素論 [33] の一応の完成とともに, 1992年ころから開始したが, 目下の状況は発展の好機を思わせる. 本誌上においても, ホワイトノイズ解析の基礎理論とともに, ホワイトノイズによる量子確率積分, 量子確率過程のホワイトノイズによる表示, 量子確率微分方程式とホワイトノイズ方程式の関連などについて報告してきた [35], [37], [39]. 本論文では, 高次のホワイトノイズ (ホワイトノイズの非線形関数) をノイズ項として含む量子確率微分方程式を, 「正規積ホワイトノイズ微分方程式」として定式化し, 解の一意存在を論じる. その際, Cochran–Kuo–Sengupta [14] による一般的な枠組みが有用である. 実際, これまでに, 空間を拡張して解の存在を保証するという形の定理 (超関数的な解の存在) については十分論じてきた [40], [41], [43], [44] ので, 本論文では, 解がいつ Fock 空間の (非有界) 作用素になるか (超

関数解の正則性) について, 最新の結果 [13] に基づいて報告しよう. 我々のアプローチは, 多方面から興味を持たれている確率解析の非線形拡張問題に直接関連してゆくものとしても期待できる. 下図は, われわれのアプローチを模式的に表したものである.



記号 位相線形空間 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ に対して, $\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{Y}$ への連続線形作用素の全体を $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ で記す. 常に有界集合上の一様収束位相を考えるあわせる. $\mathfrak{X}$ が実ベクトル空間であるとき, その複素化を $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}$ で表す.

2 量子確率微分方程式から正規積ホワイトノイズ方程式へ

伊藤型量子確率微分方程式

$$dX = (L_1 d\Lambda + L_2 dA + L_3 dA^* + L_4 dt)X, \qquad X\Big|_{t=0} = I, \tag{2.1}$$

を考えよう. ここで $\{\Lambda_t\}$, $\{A_t\}$, $\{A_t^*\}$ は, それぞれ個数過程, 消滅過程, 生成過程と呼ばれる, 基本的な量子確率過程であり, ホワイトノイズ表示を用いれば, それぞれ

$$\Lambda_t = \int_0^t a_s^* a_s \, ds, \qquad A_t = \int_0^t a_s \, ds, \qquad A_t^* = \int_0^t a_s^* \, ds, \tag{2.2}$$

と表される (ホワイトノイズによる定式化は後述). 一般には, L_i は適合量子確率過程であるが, ここでは定数と考えておいて差し支えない. (典型的には, $L_i = L_i^{(s)} \otimes I$ の形をもつ. ここで, $L_i^{(s)}$ はシステム・ヒルベルト空間上の作用素であり, I は $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ 上の恒等作用素である.) 定義として (2.1) は積分方程式

$$X_t = I + \int_0^t (L_1 X_s d\Lambda_s + L_2 X_s dA_s + L_3 X_s dA_s^* + L_4 X_s ds) \tag{2.3}$$

の簡略形であり, この積分は伊藤型量子確率積分を意味する. さらに, 方程式 (2.3) は, 指数ベクトルに関する行列要素 (これを作用素シンボルという) に対する方程式に書き直せば,

$$\begin{aligned}\langle\!\langle X_t\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle \;=\; & \langle\!\langle \phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\int_0^t\Big(\langle\!\langle L_1X_sd\Lambda_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_2X_sdA_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle \\ & +\langle\!\langle L_3X_sdA_s^*\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_4X_sds\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle\Big) \qquad (2.4)\end{aligned}$$

となり, 係数の適合性と $d\Lambda$ 等の定義によって,

$$\begin{aligned}\langle\!\langle X_t\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle \;=\; & \langle\!\langle \phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\int_0^t\Big(\xi(s)\eta(s)\,\langle\!\langle L_1X_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\xi(s)\,\langle\!\langle L_2X_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle \\ & +\eta(s)\,\langle\!\langle L_3X_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_4X_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle\Big)ds \qquad (2.5)\end{aligned}$$

のように変形される. これに対して解の一意存在や付随する量子伊藤公式などを議論したのが, Hudson–Parthasarathy [21] であった (なお, [30], [46] も参照のこと). ここで, $a_s\phi_\xi=\xi(s)\phi_\xi$ であることを用いれば, (2.5) の積分は,

$$\begin{aligned}&\int_0^t\Big(\langle\!\langle L_1X_sa_s\phi_\xi,\,a_s\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_2X_sa_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_3X_s\phi_\xi,\,a_s\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_4X_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle\Big)ds \\ &=\int_0^t\Big(\langle\!\langle L_1a_s^*X_sa_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_2X_sa_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_3a_s^*X_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle+\langle\!\langle L_4X_s\phi_\xi,\,\phi_\eta\rangle\!\rangle\Big)ds\end{aligned}$$

に等しくなる. したがって, (2.5) から作用素の部分だけを取り出せば,

$$X_t=I+\int_0^t(L_1a_s^*X_sa_s+L_2X_sa_s+L_3a_s^*X_s+L_4X_s)ds \qquad (2.6)$$

となり, さらに t で微分すれば,

$$\frac{dX_t}{dt}=L_1a_t^*X_ta_t+L_2X_ta_t+L_3a_t^*X_t+L_4X_t, \qquad X\Big|_{t=0}=I, \qquad (2.7)$$

となる. 最後に, 場の理論で使われる正規積 (Wick 積) を用いて書き直す. Wick 積を $\diamond$ で表せば,

$$a_s\diamond a_t=a_sa_t, \quad a_s^*\diamond a_t=a_s^*a_t, \quad a_s\diamond a_t^*=a_t^*a_s, \quad a_s^*\diamond a_t^*=a_s^*a_t^*.$$

また, 一般の作用素 X に対しては,

$$(a_{s_1}^*\cdots a_{s_l}^*a_{t_1}\cdots a_{t_m})\diamond X=a_{s_1}^*\cdots a_{s_l}^*Xa_{t_1}\cdots a_{t_m}$$

なる性質を持つ. したがって, (2.7) は Wick 積に関する線形方程式

$$\frac{dX_t}{dt}=(L_1a_t^*a_t+L_2a_t+L_3a_t^*+L_4)\diamond X_t, \qquad X\Big|_{t=0}=I, \qquad (2.8)$$

に帰着される. こうして, 量子確率微分方程式 (2.1) は, 単純な線形方程式 (2.8) と同値となる.

ただし, 式変形のうち, 最初のもの (これは定義) を除けば, このままでは, 意味不明な点が多い. 例えば, a_t や a_t^* があからさまな形で現れてくるが, Fock 空間に固執していたのでは, 作用素として捉えきれない. 仮に捉えられたとしても, 次に, そのような拡張された意味合いでの作用素に対して, Wick 積が定義されなければ, 方程式 (2.8) は意味を失ってしまう. さらに, そのような定式化の下で, 作用素と作用素シンボルには一対一対応が存在するのか? も疑問である. ホワイトノイズ解析は, これらの要求をすべて満足し, 上記の計算は全く正当化されるのである.

ところで, 単純な線形方程式 (2.8) は, 量子確率微分方程式 (2.1) を本質的に拡張する鍵となる. まず, (2.8) において, 係数は生成・消滅作用素に関して高々1次の項しか含んでいないことに注意しよう. このような特殊なものに限定する積極的理由は, (少なくとも数学としての立場で言えば) 見あたらない. むしろ, $t \mapsto L_t$ を任意の作用素値写像 (連続性くらいは仮定する) とし,

$$\frac{dX_t}{dt} = L_t \diamond X_t, \qquad X\Big|_{t=0} = I, \tag{2.9}$$

を考えるのが理論構成上も自然である. 本論文では, (2.9) について解の存在・一意性を論じて行くことになる. ここで注意してほしいことは, (2.9) は, 単純な線形方程式ではあるが, 量子確率微分方程式の言葉で言えば, ホワイトノイズの高次巾 (つまりホワイトノイズの非線形拡張) をノイズ項として含むものに相当するから, すでに伊藤理論の枠を踏み出していることである. そのようなノイズが自然界にあるかどうかは, 大いに議論の余地があるが, ある種の物理モデルのスケーリング極限の方法で導出される可能性がある (Volovich) ので, 数学理論の興味からだけでなく, 何らかの応用上の広がりが期待される.

ついでに述べておけば, 方程式 (2.9) は (Wick 積に関する) 非線形方程式へと拡張され, 少なくとも形式的には見通しが良さそうである. これは, 量子確率微分方程式の非線形理論を示唆するものと期待されるが, この問題に関しては, 別の機会に論ずることにする.

3 荷重つき Fock 空間

H を任意のヒルベルト空間とし, その n 重対称テンソル積を $H^{\widehat{\otimes} n}$ で表そう. ノルムは, 共通の記号 $|\cdot|$ を用いる. 正数列 $\alpha = \{\alpha(n)\}_{n=0}^{\infty}$ が与えられているとき,

$$\Gamma_\alpha(H) = \left\{ \phi \sim (f_n)\,;\, f_n \in H^{\widehat{\otimes} n}, \sum_{n=0}^{\infty} n!\, \alpha(n)\, |\, f_n\, |^2 < \infty \right\}$$

とおくと, $\Gamma_\alpha(H)$ は,

$$\|\, \phi\, \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, \alpha(n)\, |\, f_n\, |^2, \qquad \phi \sim (f_n), \tag{3.1}$$

をノルムとするヒルベルト空間になる. これを $\{\alpha(n)\}$ を荷重とする**荷重付き Fock 空間**と呼ぶことにする. ふつうの (Boson) Fock 空間は, $\alpha(n) = 1$ の場合である. [1]

[1] そうすると, (3.1) の右辺に $n!$ が残るが, これは我々の流儀である ([33] など). 物理学の文献では, $n!$ をつけないが, 理論的に本質的な違いは生じない. ただし, あとで導入する生成・消滅作用素や指数ベクトルの定義などが定数倍の変更を受ける.

正数列の間に大小関係 $\prec$ を導入しておくと便利である．2 つの正数列 $\alpha = \{\alpha(n)\}$, $\beta = \{\beta(n)\}$ に対して，

$$\text{ある正数 } C > 0 \text{ が存在して } \beta(n) \le C\alpha(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \beta \prec \alpha$$

と定義する．$\beta \prec \alpha$ ならば，自然な埋め込み写像 $\Gamma_\alpha(H) \hookrightarrow \Gamma_\beta(H)$ が定義され，連続かつ稠密な像空間をもつ．特に，$1 \prec \alpha$ ならば $\Gamma_\alpha(H) \hookrightarrow \Gamma(H)$.

なお，ここで導入した荷重付き Fock 空間は，相互作用 Fock 空間 ([29] 及びその引用文献を見よ) の特別なものとみなせる．

4 ホワイトノイズ超関数論

量子系に付随して現れる作用素は，ヒルベルト空間上の (しばしば非有界) 作用素として研究するのが本流であるが，一方で，非有界作用素の取り扱いを容易にし，新たな観点を発掘するために，Gelfand の三つ組を導入することも多くの文脈で試みられてきた ([6], [7], [48] など). ホワイトノイズ超関数論は，まさに，Fock 空間上の (非有界) 作用素に対して同じ精神で対処することになる．

本来，ホワイトノイズ超関数論は，古典ホワイトノイズ (ブラウン運動の時間微分) を時間パラメータ t をもつ確率過程として実現するための数学的枠組みとして提案された [15]. $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ を標準的なガウス空間とする．ブラウン運動は，$L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ に属する関数

$$B_t(x) = \left\langle x,\, 1_{[0,t]} \right\rangle, \qquad x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad t \ge 0,$$

として定義され，$\{B_t\}$ はガウス型確率過程となる．これを時間微分すると，

$$W_t(x) = \frac{d}{dt} B_t(x) = \langle x,\, \delta_t \rangle$$

となるため，$L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ の範囲では意味を失う．そこで，$L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ を拡張して，W_t をとらえ直すことを考えることにする．空間を拡張する方法として，稠密かつ連続に埋め込まれた部分空間 $\mathcal{W} \subset L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ をとって，共役空間を考えると，ヒルベルト空間 $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ は自己双対的であるから，

$$\mathcal{W} \subset L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu) \subset \mathcal{W}^*$$

を得る．ここで $\mathcal{W}^* \times \mathcal{W}$ 上の標準双線形形式は，ヒルベルト空間 $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ のそれを拡張したものになる．実際，$\mathcal{W}$ を上手に取れば，$t \mapsto B_t \in \mathcal{W}^*$ が微分可能になり，$t \mapsto W_t \in \mathcal{W}^*$ が連続写像として実現される．

$\mathcal{W}$ の構成法として，現在のところ最も一般的な枠組みは，Cochran–Kuo–Sengupta [14] によって導入された．これは，後で議論するように，量子確率微分方程式の解を捕らえるのに都合の良い空間を提供する．正数列 $\{\alpha(n)\}_{n=0}^{\infty}$ が CKS 条件をみたすとは，

(A1) $\alpha(0) = 1$ かつ $1 \prec \alpha$;

(A2) 対応する母関数 $G_\alpha(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n!}\, t^n$ の収束半径は無限大である;

(A3) 巾級数

$$\widetilde{G}_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{n^{2n}}{n!\alpha(n)} \left\{ \inf_{s>0} \frac{G_\alpha(s)}{s^n} \right\}$$

は正の収束半径をもつ;

の 3 条件がみたされるときにいう.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を Schwartz 空間とすれば, その双対空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は緩増加超関数の空間である. このとき, 自然に Gelfand triple

$$E \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H \equiv L^2(\mathbb{R}, dt) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \equiv E^* \tag{4.1}$$

が得られる. 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が微分作用素 $A = 1 + t^2 - d^2/dt^2$ を用いて構成されることを注意しておこう. つまり, $p \in \mathbb{R}$ に対して, ノルムを

$$|\,\xi\,|_p = |\,A^p\xi\,|_0 \equiv |\,A^p\xi\,|_{L^2(\mathbb{R})} \qquad \xi \in E,$$

で定義すると, $|\,\xi\,|_p < \infty$ をみたす ξ の全体 E_p はヒルベルト空間となり,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \operatorname*{proj\,lim}_{p\to\infty} E_p = \bigcap_{p\geq 0} E_p$$

が (位相を込めて) 成り立つ. さて,

$$\Gamma_\alpha(E) = \operatorname*{proj\,lim}_{p\to\infty} \Gamma_\alpha(E_p)$$

とおくと, $\Gamma_\alpha(E)$ は核型空間になり, その位相はノルム族:

$$\|\,\phi\,\|_{p,+}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,\alpha(n)\,|\,f_n\,|_p^2, \qquad \phi \sim (f_n), \quad p \geq 0,$$

によって定まる. よく知られた議論によって,

$$\Gamma_\alpha(E)^* \cong \operatorname*{ind\,lim}_{p\to\infty} \Gamma_{\alpha^{-1}}(E_{-p})$$

が成り立つ. ここで, $\Gamma_\alpha(E)^*$ は, いつもどおり強双対位相を考えており, $\cong$ は位相も込めた同型を意味する. 最後に, 複素化して, Gelfand の三つ組

$$\mathcal{W} \equiv \Gamma_\alpha(E_\mathbb{C}) \subset \Gamma(H_\mathbb{C}) \subset \Gamma_\alpha(E_\mathbb{C})^* \equiv \mathcal{W}^* \tag{4.2}$$

を得る. これを CKS 空間と呼ぶ. $\mathcal{W}^* \times \mathcal{W}$ 上の標準的な複素双線形形式を $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ で表す. このとき,

$$\langle\!\langle \Phi, \phi \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,\langle F_n, f_n \rangle\,, \qquad \Phi \sim (F_n) \in \mathcal{W}^*, \quad \phi \sim (f_n) \in \mathcal{W}, \tag{4.3}$$

が成り立つ.

CKS 条件をみたす $\{\alpha(n)\}$ のうち, 後で必要になるものを述べておこう. まず, $\alpha(n)=1$ は CKS 条件をみたすが, これに対応するホワイトノイズ三つ組は, Hida–Kubo–Takenaka 空間 [26] と呼ばれ $\mathcal{W}=(E)$ で表す. 次に, $0\le\beta<1$ を定数として, $\alpha(n)=(n!)^{\beta}$ に対応するものは Kondratiev–Streit 空間 [23] と呼ばれ, $\mathcal{W}=(E)_{\beta}$ で表す. 最後に, 母関数

$$G_{\mathrm{Bell}(k)}(t)=\frac{\overbrace{\exp(\exp(\cdots(\exp t)\cdots))}^{k-\text{times}}}{\exp(\exp(\cdots(\exp 0)\cdots))}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_k(n)}{n!}t^n, \tag{4.4}$$

で定義される k 階級 Bell 数列 $\{B_k(n)\}$ に対応する空間を $\mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(k)}$ で表す.

5 ホワイトノイズ作用素論

各点ごとの消滅作用素 a_t は, 定義域を制限することで, Fock 空間上の稠密な定義域をもつ非有界作用素となるが, その共役作用素である生成作用素 a_t^* は, 同一の Fock 空間上の作用素として定式化できない. (非有界作用素に対する共役作用素の定義に従えば, a_t^* の定義域は $\{0\}$ となる.) この困難を避けるため, 多くの場合は, 適当なテスト関数 $f(t)$ と積分して t をぼかすことである. 我々は, このようなアプローチを採用しない. CKS 空間で考えれば, t をぼかすことなく, a_t, a_t^* が $\mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W}^*)$ に属する作用素として定式化される.

今後は, $\{\alpha(n)\}$ は次の条件:

(A4) 適当な定数 $C_1>0$ が存在して $\alpha(m)\alpha(n)\le C_1^{m+n}\alpha(m+n)$ が成り立つ;

(A6) $\{\alpha(n)\}$ は非減少, つまり, $\alpha(0)\le\alpha(1)\le\alpha(2)\le\cdots$

もみたしているものと仮定する. (番号付けは, [13], [42] などによる) このとき,

定 理 5.1 $a_t\in\mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W})$ かつ $t\mapsto a_t\in\mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W})$ は C^{∞}-級写像である. したがって, $a_t^*\in\mathcal{L}(\mathcal{W}^*,\mathcal{W}^*)$ かつ $t\mapsto a_t\in\mathcal{L}(\mathcal{W}^*,\mathcal{W}^*)$ は C^{∞}-級写像である.

次に, 積分核作用素を導入するために, まず, テンソル積の縮約について思い出そう. $\kappa\in(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ と $f\in E_{\mathbb{C}}^{\otimes(n+m)}$ に対して (右 m-) 縮約が

$$\kappa\otimes_m f=\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\left(\sum_{\mathbf{i}}\langle\kappa,\,e(\mathbf{j})\otimes e(\mathbf{i})\rangle\langle f,\,e(\mathbf{k})\otimes e(\mathbf{i})\rangle\right)e(\mathbf{j})\otimes e(\mathbf{k}) \tag{5.1}$$

によって定義される. ただし,

$$e(\mathbf{i})=e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m},\quad e(\mathbf{j})=e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_l},\quad e(\mathbf{k})=e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_n},$$

であり, これらはそれぞれ $H_{\mathbb{C}}^{\otimes m}$, $H_{\mathbb{C}}^{\otimes l}$, $H_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ の完全正規直交基底を与える. 任意の $\kappa_{l,m}\in(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して,

$$\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})\phi\sim\left(\frac{(n+m)!}{n!}\kappa_{l,m}\otimes_m f_{n+m}\right),\qquad \phi\sim(f_n)\in\mathcal{W}. \tag{5.2}$$

によって, $\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})$ の作用を定義する. 任意の $\kappa_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して $\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \in \mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W}^*)$ となることが証明される. 積分核として滑らかな関数はもとより, 超関数をとることも可能であることが, ホワイトノイズ作用素論で本質的に重要である.

さて, $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W}^*)$ に対して

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = \langle\!\langle \Xi\phi_\xi,\, \phi_\eta \rangle\!\rangle, \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbb{C}},$$

で定義される関数 $\widehat{\Xi} : E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ を Ξ のシンボル (指数ベクトルに対する行列成分) という. 指数ベクトルは $\mathcal{W}$ の中で稠密部分空間を張るので, 連続作用素は, シンボルによって一意的に定まることになる. さらに, 次の特徴付け定理は基本的である.

定 理 5.2 [12] 関数 $\Theta : E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ がある作用素 $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W}^*)$ のシンボルであるための必要十分条件は,

(O1) 任意の $\xi,\xi_1,\eta,\eta_1 \in E_{\mathbb{C}}$ に対して $(z,w) \mapsto \Theta(z\xi+\xi_1, w\eta+\eta_1)$ が, 2 変数複素関数として, 全平面で正則である.

(O2) 適当な定数 $K \ge 0$, $p \ge 0$ をとって

$$|\Theta(\xi,\eta)|^2 \le K G_\alpha(|\xi|_p^2) G_\alpha(|\eta|_p^2), \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

の評価をもつ.

定 理 5.3 $\mathcal{W} \subset L^2(E^*,\mu) \subset \mathcal{W}^*$ を条件 (A1)–(A5) をみたす $\{\alpha(n)\}$ に付随する CKS 空間とする. このとき, 任意の $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W}^*)$ に対して, 核超関数の族 $\kappa_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*_{\mathrm{sym}(l,m)}$ が一意的に存在して

$$\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}), \tag{5.3}$$

と表示される. 無限級数 (5.3) は, $\mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W}^*)$ の位相で収束する.

$\mathcal{L}(\mathcal{W},\mathcal{W}^*)$ に属する作用素は, Fock 空間の立場から見れば, 通常の作用素とは限らず, 超関数的な対象である. そこで, 次は, $\mathcal{L}(\mathcal{W},\Gamma(H_{\mathbb{C}}))$ について基本的な結果を述べておく. 証明は, 新しいノルム

$$|\kappa|_{l,m;p,q}^2 = \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}} |\langle \kappa,\, e(\mathbf{j}) \otimes e(\mathbf{i}) \rangle|^2 \, |e(\mathbf{j})|_p^2 \, |e(\mathbf{i})|_q^2, \qquad \kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*, \tag{5.4}$$

による作用素の評価などを用いる [13].

補 題 5.4 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して, 次の 4 条件は同値である:

(i) $\kappa \in H_{\mathbb{C}}^{\otimes l} \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*$;

(ii) $\kappa \otimes_m \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^{\otimes m}, H_{\mathbb{C}}^{\otimes l})$;

(iii) 適当な $p \ge 0$ が存在して $|\kappa|_{l,m;0,-p} < \infty$;

(iv) 適当な $p \geq 0, C \geq 0$ が存在して $|\langle \kappa, g \otimes f \rangle| \leq C |g|_0 |f|_p$ が任意の $g \in H_{\mathbb{C}}^{\otimes l}, f \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes m}$ に対して成り立つ.

Schwartz–Grothendieck の核定理によって, 位相同型

$$(E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^* \cong \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}^{\otimes m}, (E_{\mathbb{C}}^{\otimes l})^*)$$

が成り立つ. $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対応する作用素は, κ による縮約作用素 $\kappa \otimes_m$ である. (i), (ii) の同値性はこれに基づく.

定 理 5.5 $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して, 次の2条件は同値である:

(i) $\Xi_{l,m}(\kappa) \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \Gamma(H_{\mathbb{C}}))$;

(ii) $\kappa \in H_{\mathbb{C}}^{\otimes l} \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*$.

そのときは, 任意の $p \geq 0, q \geq 0$ で $|\kappa|_{l,m;0,-p} < \infty, p+q > 0$ を満たすものに対して,

$$\| \Xi_{l,m}(\kappa)\phi \|_0 \leq \sqrt{\gamma}\rho^{-(p+q)/2} \left(l^l m^m\right)^{1/2} D_\epsilon^{l/2} D_{\epsilon'}^{m/2} |\kappa|_{l,m;0,-p} \| \phi \|_{p+q,+}, \qquad \phi \in \mathcal{W}. \tag{5.5}$$

ここで, $\epsilon > 0, \epsilon' > 0$ は $\epsilon + \epsilon' = p + q$ をみたすように選ばれている. また, 定数 D_s は,

$$D_s = \frac{\rho^{-s}}{-2se \log \rho}, \quad s > 0,\, m \geq 0,$$

で定義される.

6 積分核作用素の Wick 指数関数

$\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l_1+m_1)})^*, \lambda \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l_2+m_2)})^*$ を積分核とする2つの積分核作用素 $\Xi_{l_1,m_1}(\kappa), \Xi_{l_2,m_2}(\lambda)$ に対して

$$\Xi_{l_1,m_1}(\kappa) \diamond \Xi_{l_2,m_2}(\lambda) = \Xi_{l_1+l_2,m_1+m_2}(\kappa \circ \lambda),$$

と定義する. ただし, $\kappa \circ \lambda \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l_1+l_2+m_1+m_2)})^*$ は,

$$\begin{aligned}&\kappa \circ \lambda(s_1, \cdots, s_{l_1+l_2}, t_1, \cdots, t_{m_1+m_2}) \\ &\qquad = \kappa \otimes \lambda(s_1, \cdots, s_{l_1}, t_1, \cdots, t_{m_1}, s_{l_1+1}, \cdots, s_{l_1+l_2}, t_{m_1+1}, \cdots, t_{m_1+m_2}).\end{aligned}$$

によって定義される. 積分核作用素の有限和で表される作用素の全体を $\mathcal{L}_{\mathrm{ff}}$ で記す.

補 題 6.1 $\Xi \in \mathcal{L}_{\mathrm{ff}}$ として

$$\Xi = \sum_{i=1}^{k} \Xi_{l_i,m_i}(\kappa_{l_i,m_i}), \qquad \kappa_{l_i,m_i} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l_i+m_i)})^*$$

と表示しておく. このとき,

$$\Xi^{\diamond n} = \sum_{r_1+\cdots+r_k=n} \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!} \Xi_{l(r_1,\cdots,r_k),m(r_1,\cdots,r_k)}(\kappa_{l_1,m_1}^{\circ r_1} \circ \cdots \circ \kappa_{l_k,m_k}^{\circ r_k}).$$

ただし, $l(r_1, \cdots, r_k) = l_1 r_1 + \cdots + l_k r_k$, $m(r_1, \cdots, r_k) = m_1 r_1 + \cdots + m_k r_k$ である.

証明は容易である. さて, $\mathcal{L}_{1f}$ によって, 生成作用素を高々1個しか含まない積分核作用素の有限和で表せる作用素の全体とする. したがって, $\Xi \in \mathcal{L}_{1f}$ ならば,

$$\Xi = \sum_{i=1}^{k} \Xi_{l_i,m_i}(\kappa_{l_i,m_i}), \qquad 0 \le l_i \le 1, \quad m_i \ge 0. \tag{6.1}$$

のように表示されることになる.

定 理 6.2 任意の $\Xi \in \mathcal{L}_{1f}$ に対して, Wick 指数関数 $\mathrm{wexp}\, \Xi$ は $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(2)}, \Gamma(H_{\mathbb{C}}))$ で収束する. 但し, $\mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(2)}$ は2階級 Bell 数列に付随する CKS 空間である.

証 明 以下では, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(2)}$ と書く. また, Ξ は (6.1) で与えられているものとする. まず, 定数 $p \ge 0$ を, すべての i に対して $|\kappa_{l_i,m_i}|_{l_i,m_i;0,-p} < \infty$ となるように選ぶ. さらに, $r \ge 0$, $q \ge 0$ を $C_1\rho^{2r} \le 1$ かつ $p+q > 0$ であるように選ぶ. 主張のためには, 作用素のノルム

$$\| \Xi \|_{p,0} = \sup\{\| \Xi\phi \|_0 \,;\, \phi \in \mathcal{W}, \|\phi\|_{p,+} \le 1\}, \qquad \Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \Gamma(H_{\mathbb{C}})), \quad p \ge 0,$$

を用いて,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \| \Xi^{\diamond n} \|_{p+q+r,0} < \infty, \tag{6.2}$$

を示せば十分である. 補題 6.1 を用いた計算によって,

$$\| \Xi^{\diamond n} \|_{p+q+r,0} \le \sum_{r_1+\cdots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!\cdots r_k!} K_{l(r_1,\cdots,r_k),m(r_1,\cdots,r_k);\epsilon,\epsilon'} \prod_{i=1}^{k} |\kappa_{l_i,m_i}|_{l_i,m_i;0,-p}^{r_i}, \tag{6.3}$$

を得る. ただし, $\epsilon > 0$, $\epsilon' > 0$, $\epsilon + \epsilon' = p + q$ かつ

$$K_{l,m;\epsilon,\epsilon'} = \sqrt{\gamma}\rho^{-(\epsilon+\epsilon')/2} \left(\frac{l^l m^m}{\alpha(m)}\right)^{1/2} D_{\epsilon}^{l/2} D_{\epsilon'}^{m/2}.$$

また,

$$R_n = \max\left\{ \frac{m^m}{\alpha(m)} ;\ \begin{array}{l} r_1 \ge 0, \cdots, r_k \ge 0, \\ r_1 + \cdots + r_k = n, \\ m = m_1 r_1 + \cdots + m_k r_k \end{array} \right\}, \qquad n \ge 0, \tag{6.4}$$

とおく. $r_1 + \cdots + r_k = n$ のとき, 仮定 $0 \le l_i \le 1$ から $l(r_1,\cdots,r_k)^{l(r_1,\cdots,r_k)} \le n^n$ であるから,

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{r_1!\cdots r_k!} K_{l(r_1,\cdots,r_k),m(r_1,\cdots,r_k);\epsilon,\epsilon'} \prod_{i=1}^{k} |\kappa_{l_i,m_i}|_{l_i,m_i;0,-p}^{r_i} \\ &\quad = \sqrt{\gamma}\rho^{-(p+q)/2} \left(\frac{l^l m^m}{\alpha(m)}\right)^{1/2} \frac{n!}{r_1!\cdots r_k!} \prod_{i=1}^{k} \left(D_{\epsilon}^{l_i/2} D_{\epsilon'}^{m_i/2} |\kappa_{l_i,m_i}|_{l_i,m_i;0,-p} \right)^{r_i} \\ &\quad \le \sqrt{\gamma}\rho^{-(p+q)/2} (n^n R_n)^{1/2} \frac{n!}{r_1!\cdots r_k!} \prod_{i=1}^{k} \left(D_{\epsilon}^{l_i/2} D_{\epsilon'}^{m_i/2} |\kappa_{l_i,m_i}|_{l_i,m_i;0,-p} \right)^{r_i}. \end{aligned}$$

したがって, (6.3) は

$$\| \Xi^{\diamond n} \|_{p+q+r,0} \le \sqrt{\gamma}\rho^{-(p+q)/2}(n^n R_n)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} D_{\epsilon}^{l_i/2} D_{\epsilon'}^{m_i/2} \,|\, \kappa_{l_i,m_i} \,|_{l_i,m_i;0,-p} \right)^n$$

と変形され,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \| \Xi^{\diamond n} \|_{p+q+r,0} \le \sqrt{\gamma}\rho^{-(p+q)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^n R_n)^{1/2}}{n!} \left(\sum_{i=1}^{k} D_{\epsilon}^{l_i/2} D_{\epsilon'}^{m_i/2} \,|\, \kappa_{l_i,m_i} \,|_{l_i,m_i;0,-p} \right)^n$$

となる. 最後の無限和が収束することを示せばよい. そのために, 巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^n R_n)^{1/2}}{n!} t^n \tag{6.5}$$

の収束半径が ∞ であることを示そう. まず, 2階級 Bell 数列に対して, 適当な定数 $N \ge 1$, $C_2 > 1$ が存在して

$$n^n \le (C_2 \log n)^n \alpha(n), \qquad n \ge N$$

が成り立つ [14]. $m_* = \max\{m_1, \cdots, m_k\}$ とおくと,

$$\frac{m^m}{\alpha(m)} \le (C_2 \log m)^m \le (C_2 \log(m_* n))^{m_* n},$$

従って,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} R_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} (C_2 \log(m_* n))^{m_*} = 0.$$

これより, (6.5) の収束半径が ∞ であることが従う. ∎

定理 6.2 における $\Xi \in \mathcal{L}_{1f}$ は緩められない. $e \in E_{\mathbb{C}}$ を $|e|_0 = 1$ を満たすものとして, $\kappa = e \otimes e$ とおく. $\kappa \in H_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}$ であるから, 定理 5.5 によって, $\Xi_{2,0}(\kappa) \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \Gamma(H_{\mathbb{C}}))$. 容易にわかるように, $\mathrm{wexp}\,\Xi_{2,0}(\kappa) \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$. しかし, $\mathrm{wexp}\,\Xi_{2,0}(\kappa) \notin \mathcal{L}(\mathcal{W}, \Gamma(H_{\mathbb{C}}))$ である. それは,

$$\| \mathrm{wexp}\,\Xi_{2,0}(\kappa)\phi_0 \|_0^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Xi_{2n,0}(\kappa^{\otimes n})\phi_0 \right\|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)! \left| \frac{\kappa^{\otimes n}}{n!} \right|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} = \infty$$

からわかる.

7 正規積ホワイトノイズ微分方程式

問題を設定するためには, $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ に属する任意の2つの作用素に対して Wick 積 $\Xi_1 \diamond \Xi_2$ を定義する必要がある. 積分核作用素に対しては §6 で論じた. 実際, $\{\alpha(n)\}$ が (A1)–(A4), (A6) をみたすとき, $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ に Wick 積がシンボルによって定義される. すなわち, シンボルの特徴付け定理 (定理 5.2) によって, 任意の2つの作用素 $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ に対して

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = e^{-\langle \xi,\eta \rangle} \widehat{\Xi}_1(\xi,\eta) \widehat{\Xi}_2(\xi,\eta), \qquad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}, \tag{7.1}$$

をみたす $\Xi = \Xi_1 \diamond \Xi_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ が一意的に存在する. これをもって Wick 積 の定義とする.

さて, 初期値問題:

$$\frac{d\Xi}{dt} = L_t \diamond \Xi, \qquad \Xi\Big|_{t=0} = I \text{ (identity)}, \tag{7.2}$$

を考えよう. 係数 $t \mapsto L_t \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ は, 簡単のため連続性のみを仮定しておこう. さらに, 初期値として I を考えることで, 十分一般性を保っている. 実際, Ξ_t が (7.2) の解であれば, $\Omega_t = \Xi_t \diamond \Omega_0$ は初期値を Ω_0 とする同様の初期値問題の解になる. 同様に,

$$\frac{d\Xi}{dt} = L_t \diamond \Xi + M_t \qquad \Xi|_{t=0} = I, \tag{7.3}$$

も通常の論法で議論できる. 上記の微分方程式を正規積ホワイトノイズ微分方程式と総称する.

明らかに, (7.2) の形式解は積分方程式に逐次代入して:

$$\Xi_t = I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n L_{t_1} \diamond \cdots \diamond L_{t_n} \tag{7.4}$$

で与えられる. この場合は, (つまり, スカラー値ホワイトノイズ関数) のときは, Wick 積は可換であるから, (7.4) は簡単に

$$\Xi_t = \mathrm{wexp}\left(\int_0^t L_s\, ds\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_0^t L_s\, ds\right)^{\diamond n}. \tag{7.5}$$

と表記される. したがって, (7.2) の解の存在は, 係数 $\{L_t\}$ にしたがって適当な空間 $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ を選んで (7.5) の収束を示すことに帰着される. これまでに, いくつかのケースについて結果が得られている [40], [41], [42], [43], [44]. 大ざっぱに言えば, 解の一意存在は, 作用素の空間が十分広くなるように, $\mathcal{W}$ を選ぶことによって, いつでも示される.

8 解が Fock 空間作用素となる場合

なお, 初期値問題

$$\frac{d\Xi}{dt} = L_t \diamond \Xi, \qquad \Xi\Big|_{t=0} = I, \tag{8.1}$$

の考察を続けるが, $\{L_t\}$ は, $t \mapsto L_t \in \mathcal{L}_{\mathrm{ff}}$ なる連続写像とする. このとき,

$$L_t = \sum_{i=1}^{k} \Xi_{l_i,m_i}(\kappa_{l_i,m_i}(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{8.2}$$

のように表され, $t \mapsto \kappa_{l_i,m_i}(t) \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l_i+m_i)})^*$ が連続になる. さらに,

$$\lambda_i(t) \equiv \int_0^t \kappa_{l_i,m_i}(s) ds \qquad 0 \le t \le T,$$

とおく. (和に現れる項の個数 k は t によらず一定とする.)

定 理 8.1 $L_t \in \mathcal{L}_{1\mathrm{f}}$ であり, すべての $1 \le i \le k$ と $t \in [0,T]$ に対して $\lambda_i \in H_{\mathbb{C}}^{\otimes l_i} \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m_i})^*$ であれば, 初期値問題 (8.1) は $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(2)}, \Gamma(H_{\mathbb{C}}))$ に一意解を有する.

証 明 仮定によって

$$\int_0^t L_s\, ds = \sum_{i=1}^{k} \Xi_{l_i,m_i}(\lambda_i(t))$$

が成り立ち, 定理 6.2 の Ξ に対する条件を満たす. よって, (7.5) は $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(2)}, \Gamma(H_{\mathbb{C}}))$ において収束する. ∎

定理 8.1 の条件を満たす初期値問題 (8.1) の例を挙げよう. まず,

$$\frac{d\Xi}{dt} = c_1 \Xi a_t + c_2 a_t^* \Xi + c_3 a_t^* \Xi a_t + c_4 \Xi = (c_1 a_t + c_2 a_t^* + c_3 a_t^* a_t + c_4) \diamond \Xi, \qquad (8.3)$$

方程式 (8.3) は, Hudson–Parthasarathy 型の量子確率微分方程式と同等である. より一般に,

$$\frac{d\Xi}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{0n} a_t^n + c_{1n} a_t^* a_t^n) \diamond \Xi \qquad (8.4)$$

を考えることができる. ただし, 係数 c_{kn} は有限個をのぞいて 0 とする. 実際, $a_t^* a_t^n = \Xi_{1,n}(\delta_t \otimes \delta_t^{\otimes n})$ かつ

$$\left\langle \int_0^t \delta_s \otimes \delta_s^{\otimes n} ds,\, g \otimes f \right\rangle = \left\langle 1_{[0,t]} \tau_n^* f,\, g \right\rangle, \qquad f \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}, \quad g \in E_{\mathbb{C}},$$

となっている. ここで, $\tau_n^* : E_{\mathbb{C}}^{\otimes n} \to E_{\mathbb{C}}$ は $\tau_n^* f(s) = f(s,\cdots,s)$ によって定義される.

これらの例の次にくるものは, より特異性の高い係数をもつ方程式であろう:

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left(\Xi_{1,0}(\delta_t^{(n)}) + \Xi_{0,1}(\delta_t^{(n)}) + \Xi_{1,1}(\delta_t^{(n)} \otimes \delta_t^{(n)}) \right) \diamond \Xi, \qquad (8.5)$$

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left(a_t^{*2} + a_t^2 + a_t^* a_t \right) \diamond \Xi. \qquad (8.6)$$

特に, ホワイトノイズの高次巾を含む (8.6) は興味深く, 新しい展開を見せている [1], [2]. また, ホワイトノイズの微分は, ベクトル場のユニタリ表現などにも現れる [38]. これらのケースは, 定理 8.1 ではカバーされないが, Fock 空間 $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ を拡大することで結果が述べられる. 証明は, 上記のものに類似であるが, より煩雑になるので省略する.

まず, $\mathcal{K}^{\pm}$ をヒルベルト空間で,

$$E \subset \mathcal{K}^+ \subset H \subset \mathcal{K}^- \subset E^*$$

をみたし, 埋め込み $\mathcal{K}^+ \hookrightarrow H$ は縮小写像であると仮定する.

定 理 8.2 $L_t \in \mathcal{L}_{1\mathrm{f}}$ であり, すべての $1 \le i \le k$ と $t \in [0,T]$ に対して $\lambda_i(t) \in (\mathcal{K}_{\mathbb{C}}^-)^{\otimes l_i} \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m_i})^*$ であれば, 初期値問題 (8.1) は $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(2)}, \Gamma(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}^-))$ に一意解を有する.

係数 L_t に生成作用素の高次巾が含まれる場合は, 荷重付き Fock 空間の作用素として解が得られる.

定 理 8.3 $L_t \in \mathcal{L}_{\mathrm{ff}}$ であり, すべての $1 \le i \le k$ と $t \in [0,T]$ に対して $\lambda_i(t) \in (\mathcal{K}_{\mathbb{C}}^{-})^{\otimes l_i} \otimes (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m_i})^*$ であれば, 初期値問題 (8.1) は, $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\mathrm{Bell}(2)}, \Gamma_{\alpha^{-1}}(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}^{-}))$ に一意解を有する. 但し, $\alpha = \{\alpha(n)\}$ は 2 階級 Bell 数列である.

(8.5) は定理 8.2 の条件を, (8.6) は定理 8.3 の条件を満たすことがわかる. 付随する伊藤公式についての研究も始まっている, [1], [12], [19] を見よ.

参考文献

[1] L. Accardi, Y.-G. Lu and I. Volovich: *Non-linear extensions of classical and quantum stochastic calculus and essentially infinite dimensional analysis*, in "Probability Towards 2000 (L. Accardi and C. C. Heyde, Eds.)," pp. 1–33, Lect. Notes in Stat. Vol. 128, Springer–Verlag, 1998.

[2] L. Accardi, Y.-G. Lu and N. Obata: *Towards a non-linear extension of stochastic calculus*, RIMS Kokyuroku, Kyoto University **957** (1996), 1–15.

[3] S. Attal: *Non-commutative chaotic expansion of Hilbert–Schmidt operators on Fock space*, Commun. Math. Phys. **175** (1996), 43–62.

[4] V. P. Belavkin: *Quantum stochastic positive evolutions: characterization, construction, dilation*, Commun. Math. Phys. **184** (1997), 533–566.

[5] F. A. Berezin: *Wick and anti-Wick operator symbols*, Math. USSR Sbornik **15**, 577–606 (1971).

[6] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov and I. T. Todorov: "Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory," Benjamin, Massachusetts, 1975.

[7] A. Bohm and M. Gadella: "Dirac Kets, Gamow Vectors and Gel'fand Triplets," Lect. Notes in Phys. Vol. 348, Springer–Verlag, 1989.

[8] D. M. Chung, T. S. Chung and U. C. Ji: *A simple proof of analytic characterization theorem for operator symbols*, Bull. Korean Math. Soc. **34** (1997), 421–436.

[9] D. M. Chung and U. C. Ji: *Transformations on white noise functionals with their applications to Cauchy problems*, Nagoya Math. J. **147** (1997), 1–23.

[10] D. M. Chung and U. C. Ji: *Transformation groups on white noise functionals and their applications*, Appl. Math. Optim. **37** (1998), 205–223.

[11] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Transformations on white noise functions associated with second order differential operators of diagonal type*, Nagoya Math. J. **149** (1998), 173–192.

[12] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Higher powers of quantum white noises in terms of integral kernel operators*, to appear in Infinite Dimen. Anal. Quantum Prob. **1** (1998).

[13] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Normal-ordered white noise differential equations I: Existence of solutions as Fock space operators*, to appear in Proc. Italian–Japanese Meeting, Nagoya, 1997.

[14] W. G. Cochran, H.-H. Kuo and A. Sengupta: *A new class of white noise generalized functions*, Infinite Dimen. Anal. Quantum Prob. **1** (1998), 43–67.

[15] T. Hida: "Analysis of Brownian Functionals," Carleton Math. Lect. Notes no. 13, Carleton University, Ottawa, 1975.

[16] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit: "White noise: An Infinite Dimensional Calculus," Kluwer Academic Publishers, 1993.

[17] T. Hida, N. Obata and K. Saitô: *Infinite dimensional rotations and Laplacians in terms of white noise calculus*, Nagoya Math. J. **128** (1992), 65–93.

[18] E. Hille and R. Phillips: "Functional Analysis and Semi-groups,", Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXXI.

[19] Z. Huang: *Quantum white noises – White noise approach to quantum stochastic calculus*, Nagoya Math. J. **129** (1993), 23–42.

[20] Z.-Y. Huang and S.-L. Luo: *Quantum white noises and free fields*, Infinite Dimensional Analysis Quantum Probability **1** (1998), 69–82.

[21] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy: *Quantum Itô's formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301–323.

[22] Yu. G. Kondratiev, P. Leukert and L. Streit: *Wick calculus in Gaussian analysis*, Acta Appl. Math. **44** (1996), 269–294.

[23] Yu. G. Kondratiev and L. Streit: *Spaces of white noise distributions: Constructions, descriptions, applications I*, Rep. Math. Phys. **33** (1993), 341–366.

[24] P. Krée: *La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique*, in "Stochastic Analysis and Related Topics (H. Korezlioglu and A. S. Ustunel eds.)," pp. 170–233, Lect. Notes in Math. Vol. 1316, Springer–Verlag, 1988.

[25] I. Kubo: *Entire functionals and generalized functionals in white noise analysis*, preprint, 1997.

[26] I. Kubo and S. Takenaka: *Calculus on Gaussian white noise I–IV*, Proc. Japan Acad. **56A** (1980), 376–380; 411–416; **57A** (1981), 433–437; **58A** (1982), 186–189.

[27] H.-H. Kuo: "White Noise Distribution Theory," CRC Press, 1996.

[28] M. Lindsay: *Quantum and non-causal stochastic calculus*, Probab. Th. Rel. Fields **97** (1993), 65–80.

[29] Y.-G. Lu: *On the interacting free Fock space and the deformed Wigner law*, Nagoya Math. J. **145** (1997), 1–28.

[30] P.-A. Meyer: "Quantum Probability for Probabilists," Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer–Verlag, 1993.

[31] V. E. Nazaikinskii, V. E. Shatalov and B. Yu. Sternin: "Methods of Noncommutative Analysis," de Gruyter, 1995.

[32] D. Nualart: "The Malliavin Calculus and Related Topics," Springer–Verlag, 1995.

[33] N. Obata: "White Noise Calculus and Fock Space," Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer–Verlag, 1994.

[34] N. Obata: *Operator calculus on vector-valued white noise functionals*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 185–232.

[35] 尾畑伸明：ホワイトノイズによる量子確率解析, 物性研究 **62** (1994), 62–85.

[36] N. Obata: *Generalized quantum stochastic processes on Fock space*, Publ. RIMS **31** (1995), 667–702.

[37] 尾畑伸明：量子ホワイトノイズの数学的基礎, 物性研究 **66** (1996), 76–94.

[38] N. Obata: *Integral kernel operators on Fock space – Generalizations and applications to quantum dynamics*, Acta Appl. Math. **47** (1997), 49–77.

[39] 尾畑伸明：ホワイトノイズ超関数と量子確率微分方程式, 物性研究 **69** (1997), 19–38.

[40] N. Obata: *Quantum stochastic differential equations in terms of quantum white noise*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **30** (1997), 279–290.

[41] N. Obata: *Time-ordered Wick exponential and quantum stochastic differential equations*, in "Quantum Communication, Computing, and Measurement (O. Hirota, A. S. Holevo and C. M. Caves, Eds.)," pp. 355–363, Plenum, 1997.

[42] N. Obata: *White noise operators associated with the Cochran–Kuo–Sengupta space*, to appear in "Proc. Japan–Germany Joint Seminar (I. Kubo, ed.)."

[43] N. Obata: *A note on normal-ordered white noise equations*, to appear in "Proc. 8th Internat. Coll. Differential Equations."

[44] N. Obata: *Wick product of white noise operators and quantum stochastic differential equations*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[45] M. Reed and B. Simon: "Method of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis," Academic Press, 1980.

[46] K. R. Parthasarathy: "An Introduction to Quantum Stochastic Calculus," Birkhäuser, 1992.

[47] L. Streit: *An introduction to white noise analysis*, in "Stochastic Analysis and Applications in Physics (A. I. Cardoso et al., eds.)," pp. 415–439, Kluwer Academic, 1994.

[48] 田崎秀一：複素固有値問題に基づく非平衡統計力学理論 – 複素スペクトル理論, 物性研究 **60** (1993), 1–19.